Liceo scientifico e opzione scienze applicate

4 Rappresentare il grafico della funzione:

$$f(x) = \left| \frac{3-2x}{x-3} \right|.$$

Verificare se negli intervalli [0; 2] e [4; 6] valgono le ipotesi del teorema di Lagrange, e in caso affermativo trovare i punti la cui esistenza è prevista dal teorema di Lagrange. Esiste un intervallo [a; b] in cui si possa applicare il teorema di Rolle? Giustificare la risposta.

Questo file è una estensione online dei corsi di matematica
di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone

4 La funzione $f(x)=\left|\frac{3-2x}{x-3}\right|$ si ottiene passando al valore assoluto della funzione omografica $h(x)=\frac{3-2x}{x-3}$, che è un'iperbole di asintoti $x=3$ e $y=-2$ passante per i punti $\left(\frac{3}{2};0\right)$ e $(0;-1)$, come mostrato in figura.

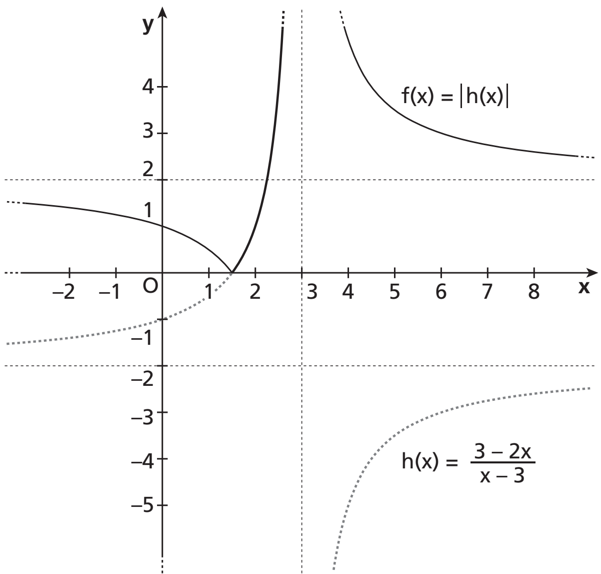


Figura 6

La funzione $f(x)$ presenta dunque gli asintoti $x=3$ e $y=2$, è continua nel dominio $x\neq 3$ e ha un punto angoloso di ascissa $x_0=\frac{3}{2}$. Non soddisfa quindi il teorema di Lagrange in $[0;2]$, perché in $]0;2[$ ha un punto di non derivabilità.
La funzione soddisfa invece il teorema in $[4;6]$, dove risulta derivabile. In tale intervallo deve quindi esistere un punto c tale che:

$$\frac{f(6)-f(4)}{6-4}=f'(c).$$

Poiché in $[4;6]$ possiamo scrivere

$$f(x)=\frac{2x-3}{x-3} \quad \text{e} \quad f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-3)}{(x-3)^2}=\frac{2x-6-2x+3}{(x-3)^2}=-\frac{3}{(x-3)^2}, \text{ da cui:}$$

$$\frac{\frac{2\cdot 6-3}{6-3}-\frac{2\cdot 4-3}{4-3}}{6-4}=-\frac{3}{(c-3)^2} \rightarrow -1=-\frac{3}{(c-3)^2} \rightarrow (c-3)^2=3 \rightarrow c=3\pm\sqrt{3} \rightarrow$$

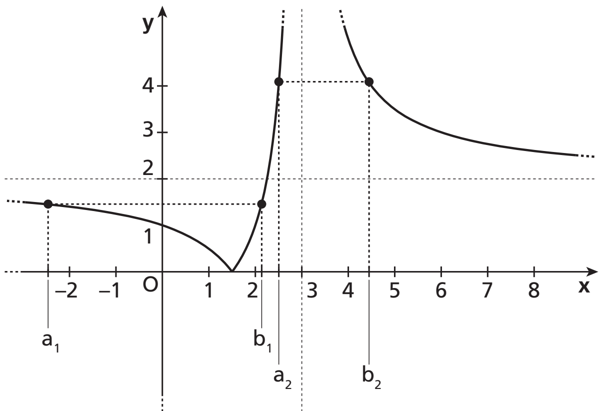
$$c=3+\sqrt{3}\simeq 4{,}73.$$

Non esiste alcun intervallo $[a;b]$ dove valga il teorema di Rolle.
In tale intervallo, infatti, dovrebbero valere le tre condizioni:

- $f(a)=f(b)$;
- $f(x)$ continua in $[a;b]$;

- $f(x)$ derivabile in $]a; b[$.

Come si deduce dalla figura a pagina seguente, gli intervalli $[a; b]$ per i quali è $f(a) = f(b)$ sono tali che $a < \frac{3}{2} < b$ oppure $a < 3 < b$ (sono individuati dall'intersezione del grafico di $f(x)$ con rette parallele all'asse x).



■ **Figura 7**

Nel primo tipo di intervallo la funzione non è derivabile in $x_0 = \frac{3}{2}$, nel secondo la funzione non è continua (e quindi derivabile) in $x = 3$. In entrambi i casi, quindi, non possiamo applicare il teorema di Rolle.