10 Trovare una funzione g, il cui insieme di definizione sia un qualsiasi intervallo contenente 0, tale che:

$g(0) = 0,\ g'(0) = 0,\ g''(0) = 0,\ g'''(0) = 1,\ g^{(4)}(0) = 1$ e $g^{(5)}(0) = 1$.

10 Cerchiamo la funzione $g(x)$ fra le funzioni polinomiali di grado 5 (perché 5 è l'ordine maggiore della derivata non nulla in $x = 0$):

$$g(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f.$$

Deriviamo la funzione $g(x)$ fino al quinto ordine:

$$g'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e,$$

$$g''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d,$$

$$g'''(x) = 60ax^2 + 24bx + 6c,$$

$$g^{(4)}(x) = 120ax + 24b,$$

$$g^{(5)}(x) = 120a,$$

e risolviamo il sistema individuato dalle 6 condizioni fornite:

$$\begin{cases} g(0) = 0,\, g'(0) = 0,\, g''(0) = 0 \\ g'''(0) = 1,\, g^{(4)}(0) = 1,\, g^{(5)}(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f = 0,\, e = 0,\, 2d = 0 \\ 6c = 1,\, 24b = 1,\, 120a = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} f = 0,\, e = 0,\, d = 0 \\ c = \dfrac{1}{6},\, b = \dfrac{1}{24},\, a = \dfrac{1}{120} \end{cases}.$$

La funzione cercata è dunque:

$$g(x) = \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3$$

che è definita su $\mathbb{R}$ e quindi su ogni intervallo contenente 0.