10 Data la funzione:

$$f(x) = |4 - x^2|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3; 3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3; 3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

10 Studiamo il segno dell'argomento del valore assoluto:

$$4 - x^2 \geq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Per la definizione di valore assoluto, in $[-3; 3]$ si ha:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{se } -3 \leq x < -2 \vee 2 < x \leq 3 \end{cases}.$$

L'intervallo $[-3; 3]$ è chiuso e limitato, come richiesto dal teorema di Rolle.
Analizziamo le ipotesi del teorema di Rolle.

Continuità in $[-3; 3]$
L'espressione analitica è polinomiale, quindi la funzione è continua nei punti interni agli intervalli di definizione dei due tratti.
Analizziamo la continuità nei punti di ascissa $x = -2$ e $x = 2$.
Calcoliamo i limiti sinistro e destro nel punto di ascissa $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x^2 - 4) = 0,$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (4 - x^2) = 0,$$

$$f(-2) = 4 - (-2)^2 = 0,$$

dunque la funzione è continua in $x = -2$.
Analogamente si può verificare che la funzione è continua in $x = 2$, quindi l'ipotesi di continuità è verificata.

Derivabilità in $]-3; 3[$
Deriviamo la funzione:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } -2 < x < 2 \\ +2x & \text{se } -3 < x < -2 \vee 2 < x < 3 \end{cases}.$$

L'espressione analitica della derivata è polinomiale, quindi la funzione è derivabile a eccezione eventualmente dei punti di ascissa $x = -2$ e $x = 2$.

Stabiliamo se la funzione è derivabile in $x = -2$, calcolando i limiti sinistro e destro.
Poiché:

$$f'_-(-2) = \lim_{x \to -2^-} 2x = -4 \text{ e } f'_+(-2) = \lim_{x \to -2^+} (-2x) = 4,$$

la funzione non è derivabile in $x = -2$. Analogamente si verifica che la funzione non è derivabile in $x = 2$ e quindi la seconda ipotesi del teorema di Rolle non è verificata.

Osserviamo che, nonostante non tutte le ipotesi del teorema siano verificate, esiste un punto interno all'intervallo in cui la derivata si annulla: $x = 0$. Tale esempio non è in contraddizione con il teorema di Rolle. Il teorema, infatti, assicura l'esistenza di almeno un punto interno all'intervallo in cui la derivata si annulla nel caso le ipotesi siano tutte verificate. Non esclude che punti in cui la derivata si annulla esistano anche se le ipotesi non sono verificate. Le ipotesi del teorema sono infatti condizioni sufficienti ma non necessarie.
Se consideriamo l'intervallo $[-1; 1]$, le prime due ipotesi del teorema sono verificate. Vale anche la terza ipotesi richiesta dal teorema. Infatti: $f(-1) = f(1) = 4 - (\pm 1)^2 = 3$. Pertanto il punto $x = 0$ trovato in precedenza è il punto di cui assicura l'esistenza il teorema di Rolle applicato all'intervallo $[-1; 1]$.