Liceo scientifico e opzione scienze applicate

4 Data la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - kx + h & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

determinare i parametri h e k in modo che $f(x)$ sia derivabile in tutto l'intervallo [0; 4].

4 Consideriamo la funzione a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - kx + h & 2 < x \leq 4 \end{cases}.$$

Le funzioni componenti sono polinomiali. Pertanto la funzione $f(x)$ è continua e derivabile nei punti interni dei due intervalli $[0; 2]$ e $]2; 4]$ su cui è definita, è continua e derivabile a destra nell'estremo $x = 0$ ed è continua e derivabile a sinistra nell'estremo $x = 4$. L'unico punto da considerare è quindi $x = 2$.
Imponiamo la condizione di continuità nel punto $x = 2$ in cui si ha $\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 8$:

$$\lim_{x \to 2^+} (x^2 - kx + h) = 8 \to 4 - 2k + h = 8.$$

Calcoliamo la derivata sinistra e destra in $x = 2$.

$$f'_-(x) = 3x^2 \ \to \ f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} 3x^2 = 12;$$

$$f'_+(x) = 2x - k \ \to \ f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} (2x - k) = 4 - k.$$

Imponiamo la condizione di derivabilità nel punto $x = 2$:

$$12 = 4 - k \ \to \ k = -8.$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 4 - 2k + h = 8 \\ k = -8 \end{cases} \to \begin{cases} h = -12 \\ k = -8 \end{cases}.$$

La funzione è quindi derivabile in tutto l'intervallo $[0; 4]$ per $h = -12$ e $k = -8$.