10 Data la funzione integrale:

$$F(x) = \int_0^{e^{2x}} \ln(t)\,dt,$$

calcolare la sua derivata prima e di quest'ultima individuare gli eventuali punti stazionari.

10 In generale, la funzione integrale $H(x) = \int_a^x h(t)\,dt$ è definita per una funzione $h(t)$ continua in $[a; b]$.

Nel caso in esame si chiede di considerare la funzione integrale:

$$F(x) = \int_0^{e^{2x}} \ln t\,dt,$$

ma la funzione integranda $f(t) = \ln t$ non è definita in $t = 0$.
La funzione integrale assegnata va quindi intesa in senso generalizzato (o improprio):

$$F(x) = \lim_{k \to 0^+} \int_k^{e^{2x}} \ln t\,dt = \lim_{k \to 0^+} [t \ln t - t]_k^{e^{2x}} = \lim_{k \to 0^+} [(2xe^{2x} - e^{2x}) - (k \ln k - k)] = (2x-1)e^{2x},$$

dove in particolare vale il limite $\lim\limits_{k \to 0^+} (k \ln k) = 0$ per la gerarchia degli infiniti e degli infinitesimi.

La funzione integrale è derivabile, con derivata:

$$F'(x) = 2e^{2x} + (2x-1)e^{2x} \cdot 2 = 4xe^{2x}.$$

I punti stazionari di $F'(x)$ sono individuati dai punti in cui la sua derivata prima si annulla, ovvero dai punti per i quali $F''(x) = 0$.
Svolgiamo i calcoli:

$$F''(x) = 0 \ \rightarrow \ 4e^{2x} + 8xe^{2x} = 0 \ \rightarrow \ (4+8x)e^{2x} = 0 \ \rightarrow \ 4 + 8x = 0 \ \rightarrow \ x = -\frac{1}{2}.$$

L'unico punto stazionario di $F'(x)$ ha ascissa $x = -\frac{1}{2}$.