Scuole italiane all'estero • Europa

7 Una particella si muove lungo una certa curva secondo le seguenti leggi:

$$x(t) = 3 - 2 \cdot \cos(t), \; y(t) = 2 + 3 \cdot \sin(t).$$

Disegnare la traiettoria percorsa dalla particella per t che va da 0 a 2π secondi e determinare la velocità di variazione di θ, l'angolo formato dalla tangente alla traiettoria con l'asse x, per $t = \frac{2}{3}\pi$ secondi.

7 Le leggi orarie sono

$$\begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos t \\ y(t) = 2 + 3\sin t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{3 - x(t)}{2} \\ \sin t = \dfrac{y(t) - 2}{3} \end{cases}.$$

Da $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ otteniamo $\left(\frac{y-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3-x}{2}\right)^2 = 1$.

Quindi le leggi orarie descrivono una ellisse di centro $C(3; 2)$, semiasse minore (lungo l'asse x) $a = 2$ e semiasse maggiore (lungo l'asse y) $b = 3$.

L'equazione cartesiana di tale ellisse è:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

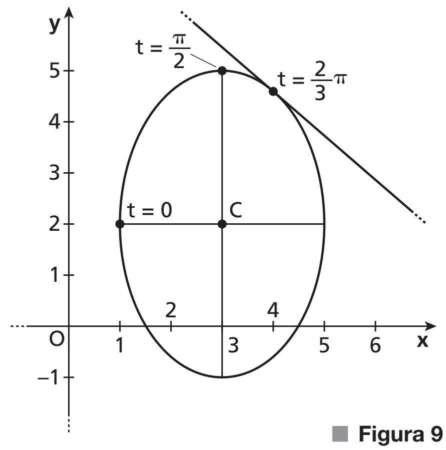

Figura 9

All'istante $t = 0$ la particella si trova in $(3 - 2 \cdot 1; 2 + 3 \cdot 0) = (1; 2)$, all'istante $t = \frac{\pi}{2}$ la particella si trova in $(3 - 2 \cdot 0; 2 + 3 \cdot 1) = (3; 5)$, quindi il punto si muove in senso orario lungo l'ellisse.

All'istante $t = \frac{2}{3}\pi$ la particella è nella posizione:

$$\left(3 - 2 \cdot \cos\frac{2}{3}\pi; 2 + 3 \cdot \sin\frac{2}{3}\pi\right) = \left(3 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right); 2 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(4; 2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right).$$

In un intorno di tale punto possiamo descrivere la traiettoria della particella mediante una funzione $f(x)$. La derivata $\frac{dy}{dx}$ fornisce il coefficiente angolare $m = \tan\theta$ della retta tangente alla traiettoria, con θ angolo formato dalla retta tangente con l'asse x, pertanto:

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'}{x'},$$

dove x' e y' rappresentano le derivate rispetto al tempo delle leggi orarie.

Sviluppiamo i calcoli:

$$\tan\theta = \frac{y'}{x'} = \frac{3\cos t}{2\sin t} = \frac{3}{2\tan t} \rightarrow \theta(t) = \arctan\frac{3}{2\tan t}.$$

Siamo ora in grado di calcolare la velocità di variazione di θ; deriviamo rispetto al tempo la sua espressione analitica:

$$\theta'(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{2\tan t}\right)^2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{-(1 + \tan^2 t)}{\tan^2 t} \rightarrow$$

$$\theta'(t) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{4\tan^2 t}{4\tan^2 t + 9} \cdot \frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t} \rightarrow$$

$$\theta'(t) = -6 \cdot \frac{1 + \tan^2 t}{4\tan^2 t + 9}.$$

Per $t = \frac{2}{3}\pi$, la velocità di variazione di θ è pari a:

$$\theta'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -6 \cdot \frac{1 + \tan^2 \frac{2}{3}\pi}{4\tan^2 \frac{2}{3}\pi + 9} = -6 \cdot \frac{1 + (-\sqrt{3})^2}{4(-\sqrt{3})^2 + 9} = -6 \cdot \frac{1+3}{4 \cdot 3 + 9} = -2 \cdot \frac{4}{7} = -\frac{8}{7} \simeq -1,14 \text{ rad/s}.$$