9 Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases},$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0; 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

9 Per applicare il teorema di Lagrange, $f(x)$ deve essere continua nell'intervallo chiuso $[0; 2]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]0; 2[$. Affinché $f(x)$ sia continua, deve essere:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \ \to \ 1 - k + k = 1 \ \to \ 1 = 1 \text{ e quindi la condizione è verificata } \forall k \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora le condizioni per cui $f(x)$ è derivabile.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - k & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}; \quad \lim_{x \to 1^-} 3x^2 = 3; \quad \lim_{x \to 1^+} (2x - k) = 2 - k.$$

Otteniamo: $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) \ \to \ 3 = 2 - k \ \to \ k = -1.$

Per $k = -1$ la funzione diventa

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Per $k = -1$ la funzione $f(x)$ soddisfa quindi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0; 2]$; e quindi $\exists c \in]0; 2[$ tale che:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c) \to \frac{5 - 0}{2} = f'(c) \to \frac{5}{2} = f'(c).$$

La derivata $f'(x)$ invece ha equazione:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

$\ln x = 1$ $f'(1) = 3$, quindi $c \neq 1$. Cerchiamo $c \in]1; 2[$ tale che $f'(c) = \frac{5}{2}$:

$$f'(c) = 2c + 1 \ \to \ 2c + 1 = \frac{5}{2} \ \to \ 2c = \frac{3}{2} \ \to \ c = \frac{3}{4}, \text{ ma } \frac{3}{4} \notin]1; 2[.$$

Cerchiamo $c \in]0; 1[$ tale che $f'(c) = \frac{5}{2}$: $f'(c) = 3c^2 \ \to \ 3c^2 = \frac{5}{2} \ \to \ c^2 = \frac{5}{6} \ \to \ c = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$.

$-\sqrt{\frac{5}{6}} \notin]0; 1[$; il punto cercato, la cui esistenza è garantita dal teorema di Lagrange, è $c = \sqrt{\frac{5}{6}}$.