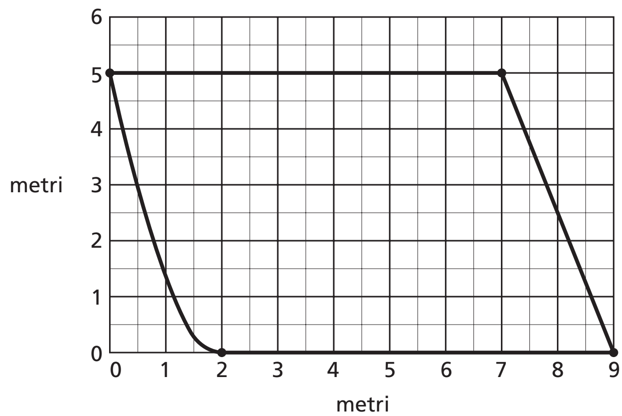
## PROBLEMA 1

Sei l'amministratore di un condominio che ha deliberato di dotarsi di una sala per le riunioni condominiali, sfruttando uno spazio comune già disponibile, da coprire e attrezzare.

La superficie individuata è rappresentata in figura 1:




■ **Figura 1**

La superficie viene chiusa con pareti laterali alte 3,60 metri e con un tetto piano e orizzontale. Uno dei condomini ti fa presente la necessità di prevedere un impianto di aerazione nella sala, in quanto la mancanza di un adeguato ricambio d'aria in locali chiusi può provocare una serie di disturbi fisici, a causa dell'accumulo di $CO_2$ (anidride carbonica o diossido di carbonio). Di norma si considera come valore limite della concentrazione di $CO_2$ lo 0,15%: su 1 milione di particelle d'aria il massimo numero di molecole di $CO_2$ deve essere dunque 1500.

Nella scelta dell'impianto di aerazione un parametro fondamentale è la potenza in kilowatt, che dipende dal volume dell'ambiente in cui esso viene utilizzato.

La seguente scheda tecnica, fornita dal produttore, fa riferimento alle comuni esigenze di utilizzo:

| Metri cubi da aerare | Potenza richiesta (kilowatt) |
|---|---|
| 41 | 2 |
| 68 | 2,6 |
| 108 | 3,5 |
| 135 | 4,4 |
| 162 | 5,3 |
| 216 | 6,1 |
| 270 | 7,2 |

**1.** In base ai dati disponibili e alla scheda tecnica, stima la potenza in kilowatt necessaria, giustificando la tua scelta.

In occasione di una riunione di condominio, un rilevatore di $CO_2$ installato nella sala indica una concentrazione dello 0,3%; i condomini chiedono quindi di accendere l'impianto di aerazione, in modo che all'ora di inizio della riunione la concentrazione sia stata ridotta allo 0,15%. Il sistema di aerazione immette nella sala 20 $\frac{m^3}{\text{minuto}}$ di aria fresca contenente lo 0,1% di $CO_2$.

**2.** Approssimando il volume della sala a 130 $m^3$, ricava l'equazione differenziale che descrive l'andamento della concentrazione $c\,(t)$ in funzione del tempo $t$ (espresso in minuti).

Verifica inoltre che la funzione $c(t) = k \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + h$ è una soluzione di tale equazione differenziale.

**3.** Determina i valori da assegnare alle costanti $k$ e $h$ in modo che la funzione rappresenti l'andamento della concentrazione di $CO_2$ a partire dall'istante $t = 0$ di accensione dell'aeratore. Stabilisci quindi quanto tempo prima dell'inizio della riunione esso deve essere acceso, per soddisfare la richiesta dei condomini.

**4.** L'impianto è in funzione da 10 minuti, quando i 50 partecipanti alla riunione accedono alla sala. Considerando che l'impianto rimane acceso anche durante la riunione e che un essere umano mediamente espira 8 litri/minuto di aria contenente il 4% di $CO_2$ (*fonte*: OSHA, *Occupational Safety and Health Administration*), descrivi in termini qualitativi come cambierà l'andamento di $c\,(t)$ dopo l'ingresso dei condomini nella sala, giustificando la tua risposta.

## PROBLEMA 1

**1.** Calcoliamo il volume della sala applicando la formula *area base × altezza*.
L'altezza è 3,6 m.
Per stimare l'area di base, osserviamo che la superficie della sala è compresa fra quella del parallelogramma $ABCD$ e quella del trapezio $A'BCD$ indicati in figura 3.

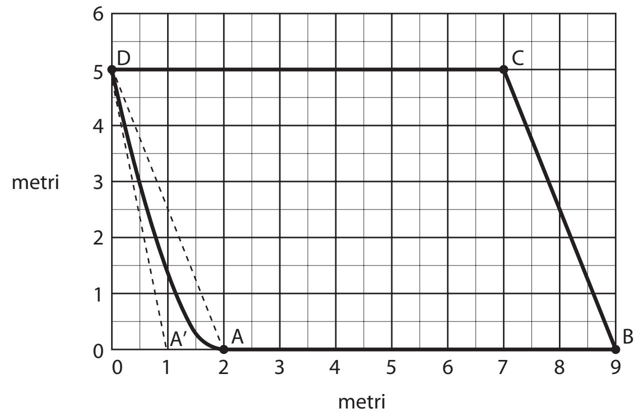



Figura 3

$$\text{Area}(ABCD) = 7 \cdot 5 = 35 \text{ m}^2$$

$$\text{Area}(A'BCD) = \frac{(8+7) \cdot 5}{2} = 37,5 \text{ m}^2$$

Possiamo dunque stimare la superficie della sala tramite la media aritmetica delle aree appena calcolate:

$$\text{Area di base della sala} \simeq \frac{35 + 37,5}{2} = 36,25 \text{ m}^2$$

e ricavare infine il volume della sala:

$$\text{Volume della sala} \simeq 36,25 \cdot 3,6 = 130,5 \text{ m}^3.$$

Osserviamo ora la scheda tecnica che ci fornisce il testo e notiamo che per aerare 135 $\text{m}^3$ occorrono 4,4 kW. La potenza richiesta sarà quindi di circa 4,4 kW.

**2.** Indichiamo con $v(t)$ il volume di $CO_2$ presente nella sala all'istante $t$ (dove $t = 0$ è l'istante in cui si accende l'aeratore) e con $V = 130$ $\text{m}^3$ il volume, approssimato, della sala stessa. La concentrazione di $CO_2$ risulterà allora dal rapporto $c(t) = \dfrac{v(t)}{V}$.
Per ogni minuto di funzionamento l'aeratore immette nella sala 20 $\text{m}^3$ di aria fresca contenente lo 0,1% di $CO_2$, quindi immette nella sala:

$$20 \cdot \frac{0,1}{100} = 20 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ m}^3 \text{ di } CO_2.$$

In $\Delta t$ minuti di funzionamento verranno allora immessi nella sala:

$$0,02 \cdot \Delta t \text{ m}^3 \text{ di } CO_2.$$

Contemporaneamente, in un minuto di funzionamento a partire dall'istante $t$, verranno espulsi dalla sala 20 $\text{m}^3$ di aria "viziata", dove la concentrazione di $CO_2$ la possiamo pensare in prima approssimazione costante e pari a $c(t)$, ovvero la concentrazione presente all'inizio del minuto considerato. In $\Delta t$ minuti di funzionamento, verranno allora espulsi dalla sala:

$$20 \cdot c(t) \cdot \Delta t \text{ m}^3 \text{ di } CO_2.$$

Concludiamo che, nel passare dall'istante $t$ all'istante $t+\Delta t$, il bilancio del volume di $CO_2$ presente in sala è:

$$v(t+\Delta t)-v(t)=0{,}02\cdot\Delta t-20\cdot c(t)\cdot\Delta t$$

e, dividendo entrambi i membri per il volume della sala $V$, otteniamo il bilancio della concentrazione di $CO_2$:

$$c(t+\Delta t)-c(t)=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{V}=\frac{0{,}02\cdot\Delta t-20\cdot c(t)\cdot\Delta t}{V},$$

da cui ricaviamo:

$$\frac{c(t+\Delta t)-c(t)}{\Delta t}=\frac{0{,}02}{V}-\frac{20}{V}c(t)=\frac{0{,}02}{130}-\frac{20}{130}c(t)=\frac{2}{13}[0{,}001-c(t)].$$

Passando al limite per $\Delta t\to 0$ otteniamo la relazione fra la concentrazione $c(t)$ e la sua velocità di cambiamento $c'(t)$, che si presenta sotto forma di equazione differenziale a variabili separabili:

$$c'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{c(t+\Delta t)-c(t)}{\Delta t}\quad\to\quad c'(t)=\frac{2}{13}[0{,}001-c(t)].$$

Pur non essendo richiesto, possiamo risolvere tale equazione:

$$\frac{dc(t)}{c(t)-0{,}001}=-\frac{2}{13}dt\ \to\ \ln\left|c(t)-0{,}001\right|=-\frac{2}{13}t+\alpha\ \to\ c(t)-0{,}001=\pm e^{-\frac{2}{13}t+\alpha}\ \to$$

$$c(t)=\pm e^{\alpha}\cdot e^{-\frac{2}{13}t}+0{,}001,\ \text{con}\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

La soluzione si presenta nella forma richiesta dal testo del problema:

$$c(t)=k\cdot e^{-\frac{2}{13}t}+h,$$

posto $k=\pm e^{\alpha}$ e $h=0{,}001$.

3. Abbiamo già stabilito al punto precedente che è $h=0{,}001$.
Per determinare $k$, imponiamo che la concentrazione di $CO_2$ all'istante iniziale sia dello 0,3%:

$$c(0)=\frac{0{,}3}{100}\ \to\ k\cdot e^{-\frac{2}{13}\cdot 0}+0{,}001=0{,}003\ \to\ k=0{,}002.$$

Otteniamo dunque:

$$c(t)=0{,}002\cdot e^{-\frac{2}{13}t}+0{,}001.$$

Tracciamo il grafico della funzione $c(t)$. Passa per il punto $E(0;\,0{,}003)$, ha un asintoto orizzontale di equazione $y=0{,}001$ poiché $\lim_{t\to+\infty}\left(0{,}002\cdot e^{-\frac{2}{13}t}+0{,}001\right)=0{,}001$ e si tratta di una funzione sempre decrescente in quanto è un'esponenziale con esponente di primo grado negativo.

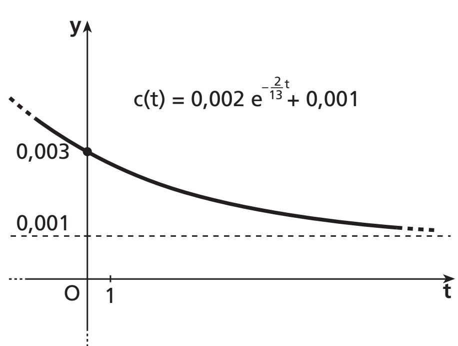



**Figura 4**

Poiché i condomini richiedono che nel momento della riunione la concentrazione di $CO_2$ sia ridotta allo 0,15%, abbiamo:

$$0,0015 = 0,002 \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + 0,001 \rightarrow 15 = 20e^{-\frac{2}{13}t} + 10 \rightarrow 20e^{-\frac{2}{13}t} = 5 \rightarrow e^{-\frac{2}{13}t} = \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$e^{\frac{2}{13}t} = 4 \rightarrow \frac{2}{13}t = \ln 4 \rightarrow t = \frac{13}{2}\ln 4 \simeq 9,01.$$

L'impianto deve quindi essere messo in funzione circa 9 minuti prima dell'inizio della riunione.

**4.** Dopo 10 minuti dall'accensione dell'aeratore abbiamo:

$$c(10) = 0,002 \cdot e^{-\frac{2}{13}\cdot 10} + 0,001 \simeq 1,43 \cdot 10^{-3},$$

e quindi la concentrazione di $CO_2$ diventa di circa 0,143%.
Ognuno dei 50 condomini che entra nella sala al decimo minuto, inspira 8 litri/minuto di aria, dove la concentrazione di $CO_2$ è $c(t)$, ed espira 8 litri/minuto di aria contenente il 4% di $CO_2$. Nel frattempo, l'aeratore è ancora in funzione. Analogamente a prima, possiamo impostare il bilancio del volume di $CO_2$ presente in sala a partire dal decimo minuto (ricordiamo che 1 litro = 1 $dm^3 = 10^{-3}$ $m^3$):

$$v(t+\Delta t) - v(t) = 0,02 \cdot \Delta t - 20 \cdot c(t) \cdot \Delta t - 8 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot c(t) \cdot \Delta t + 8 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot \frac{4}{100} \cdot \Delta t$$

da cui (passando ai numeri decimali visto che serve solo una valutazione qualitativa):

$$c'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{V \cdot \Delta t} = \frac{0,02}{130} - \frac{20}{130} \cdot c(t) - \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 50}{130} \cdot c(t) + 8 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{130} \rightarrow$$

$$c'(t) = 0,154 \cdot 10^{-3} - 0,154 \cdot c(t) - 3,077 \cdot 10^{-3} \cdot c(t) + 0,123 \cdot 10^{-3} \rightarrow$$

$$c'(t) = 0,277 \cdot 10^{-3} - 0,154 \cdot c(t) \rightarrow c'(t) = 0,0003 - 0,16 \cdot c(t).$$

Risolvendo l'equazione differenziale otteniamo:

$$c'(t) = -0,16\,[c(t) - 0,002] \rightarrow \frac{dc(t)}{c(t) - 0,002} = -0,16dt \rightarrow$$

$$\ln|c(t) - 0,002| = -0,16t + \alpha \rightarrow c(t) - 0,002 = \pm e^{-0,16t+\alpha} \rightarrow c(t) = k \cdot e^{-0,16t} + 0,002,$$

dove $k = \pm e^{\alpha}$.

Per la continuità della funzione concentrazione, imponiamo che per $t = 10$ minuti sia $c(t) = 1,43 \cdot 10^{-3}$, cioè il valore calcolato prima:

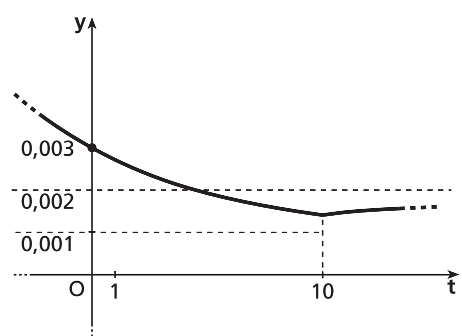
$$c(10) = 1,43 \cdot 10^{-3} \rightarrow k \cdot e^{-0,16 \cdot 10} + 0,002 = 1,43 \cdot 10^{-3} \rightarrow k = \frac{1,43 \cdot 10^{-3} - 0,002}{e^{-1,6}} \simeq -0,003.$$

L'andamento complessivo della concentrazione è rappresentato da una funzione definita a tratti:

$$c(t) = \begin{cases} 0,002 \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + 0,001 & \text{se } 0 \leq t < 10 \\ -0,003 \cdot e^{-0,16t} + 0,002 & \text{se } t \geq 10 \end{cases}.$$

Otteniamo il seguente grafico qualitativo. Per $t \geq 10$ la funzione è esponenziale crescente e ammette asintoto orizzontale di equazione $y = 0,002$ poiché

$$\lim_{t \to +\infty} (-0,003 \cdot e^{-0,16t} + 0,02) = 0,002.$$




■ **Figura 5**

Nel testo, si dice che di norma si considera il valore limite della concentrazione di $CO_2$ fissato allo 0,15%. Questo ci permette di ricavare quanto tempo occorre, dopo l'inizio della riunione, per raggiungere tale limite.

$$-0,003 \cdot e^{-0,16t} + 0,002 = 0,0015 \ \rightarrow \ -0,003 \cdot e^{-0,16t} = -0,0005 \ \rightarrow \ e^{-0,16t} = 0,17 \ \rightarrow$$

$$-0,16t = \ln 0,17 \ \rightarrow \ t = -\frac{\ln 0,17}{0,16} \simeq 11 \text{ minuti.}$$

Quindi $\Delta t = (11 - 10)$ minuti $= 1$ minuto.

Il valore limite della concentrazione di $CO_2$ si raggiunge dopo circa un minuto dall'inizio della riunione. Poiché la funzione per $t \rightarrow +\infty$ ammette asintoto orizzontale $y = 0,002$, la concentrazione di $CO_2$ non supererà mai lo 0,2% circa.