PROBLEMA 2

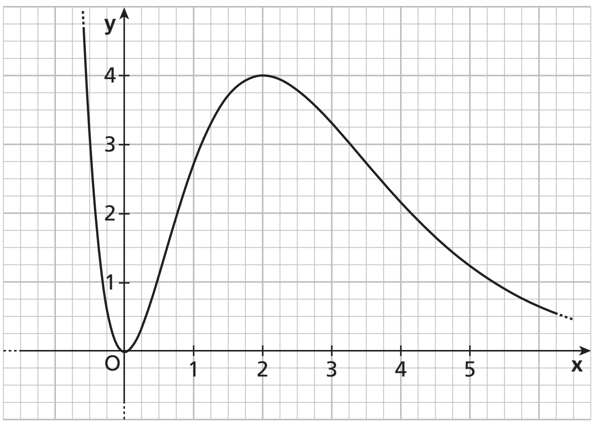


Figura 1

Il grafico G in figura 1 rappresenta una funzione del tipo:

$$f(x) = x^k \cdot e^{(k-x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}, k > 1.$$

1. determina il valore del parametro k affinché la $f(x)$ sia rappresentata dal grafico, motivando la tua risposta. Calcola inoltre le coordinate dei punti di flesso, le equazioni degli eventuali asintoti e le equazioni delle rette tangenti a G nei punti di flesso;

2. considera un triangolo avente i vertici, rispettivamente, nell'origine, nel punto della funzione $f(x)$ di ascissa a, e nel punto P sua proiezione sull'asse x. Determina il valore $a \geq 0$ per cui la sua area sia massima;

3. calcola l'area della regione piana delimitata da G e dall'asse x nell'intervallo [0; 2] e determina il valore dell'errore percentuale che si verifica nel calcolo di tale area se nell'intervallo [0; 2] si adotta, per approssimare $f(x)$, una funzione razionale di 3° grado della forma

$$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

con $r(0) = f(0) = 0$, $r(2) = f(2) = 4$, $r'(0) = 0$, $r'(2) = 0$;

4. dimostra che, dette A e B le intersezioni tra le tangenti a G nei punti di flesso e l'asse x, C e D le proiezioni dei punti di flesso sull'asse x, si ha:

$$\overline{AB} = 2\overline{CD},$$

per qualsiasi $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x) = x^k e^{k-x}$, con $k \in \mathbb{N}$ e $k > 1$, ha un punto di minimo relativo in $x = 0$ e un punto di massimo relativo in $x = 2$, come si deduce dal grafico del problema.
Poiché la funzione è derivabile su $\mathbb{R}$, la derivata prima si deve annullare in $x = 0$ e $x = 2$.
La derivata prima:

$$f'(x) = x^k e^{k-x} = kx^{k-1}e^{k-x} - x^k e^{k-x} = x^{k-1}e^{k-x}(k-x)$$

si annulla in $x = 0$ e $x = k$, quindi deve essere $k = 2$ e la funzione da considerare è:

$$f(x) = x^2 e^{2-x}.$$

Assicuriamoci che questa funzione corrisponda con il grafico dato.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{2-x} = +\infty$, in accordo al grafico.

  La funzione non ammette asintoto obliquo sinistro, in quanto:

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{2-x} = -\infty \text{ non è finito.}$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{2-x} = 0$, in accordo con il grafico.

  Nel limite compare la forma indeterminata $\infty \cdot 0$, ma l'infinitesimo dell'esponenziale e^{2-x} prevale sull'infinito x^2, quindi il risultato del limite è 0.
  La funzione ammette dunque l'asse x come asintoto orizzontale destro.

- La derivata prima:

  $$f'(x) = xe^{2-x}(2-x)$$

  è negativa per $x < 0 \vee x > 2$, positiva per $0 < x < 2$, quindi la funzione $f(x)$ è decrescente per $x < 0 \vee x > 2$ e crescente per $0 < x < 2$, ammette minimo relativo in $x = 0$ con $f(0) = 0$ e massimo relativo in $x = 2$ con $f(2) = 2^2 e^0 = 4$, in accordo con il grafico.

Determiniamo i punti di flesso e le equazioni delle rette tangenti al grafico G nei punti flesso.
Eseguiamo i calcoli sulla generica funzione $f(x) = x^k e^{k-x}$, dove è ancora presente il parametro k, perché al punto **4.** del problema vanno considerate le rette tangenti al variare di k.
La derivata prima, già calcolata, è:

$$f'(x) = x^{k-1}e^{k-x}(k-x).$$

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = (k-1)x^{k-2}e^{k-x}(k-x) - x^{k-1}e^{k-x}(k-x) - x^{k-1}e^{k-x} =$$
$$x^{k-2}e^{k-x}[(k-1)(k-x) - x(k-x) - x] = x^{k-2}e^{k-x}(k^2 - kx - k + x - kx + x^2 - x) =$$
$$x^{k-2}e^{k-x}(x^2 - 2kx + k^2 - k).$$

Osserviamo che se $k \geq 3$ e k è dispari, $x = 0$ è un punto di flesso per la funzione perché annulla la derivata seconda e $f''(x)$ cambia di segno prima e dopo lo 0. Poiché $f'(0) = 0$, tale flesso è a tangente orizzontale.
Se invece $k \geq 2$ e k è pari, la derivata seconda non cambia di segno prima e dopo $x = 0$, quindi $x = 0$ non è punto di flesso.

Per trovare gli altri punti di flesso, calcoliamo gli zeri (diversi da $x = 0$) della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2kx + k^2 - k = 0 \;\rightarrow\; x = k \pm \sqrt{k^2 - k^2 + k} = k \pm \sqrt{k}\,.$$

Compiliamo lo schema dei segni della derivata seconda e della concavità della funzione (limitando l'esame a $x > 0$) ricordando che per $k > 1$ si ha $k > \sqrt{k}$.

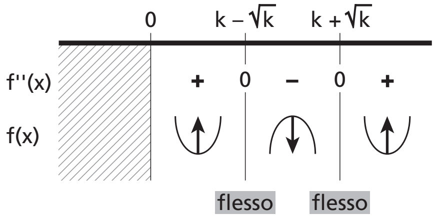


Figura 5

La funzione $f(x)$ presenta dunque due flessi di ascissa $x_1 = k - \sqrt{k}$ e $x_2 = k + \sqrt{k}$.
Calcoliamo le equazioni delle rette tangenti nei punti di flesso.
Il primo flesso F_1, di ascissa $x_1 = k - \sqrt{k}$, ha ordinata:

$$y_1 = f(k - \sqrt{k}) = (k - \sqrt{k})^k e^{k-(k-\sqrt{k})} = (k - \sqrt{k})^k e^{\sqrt{k}}.$$

La retta tangente al grafico in F_1 ha coefficiente angolare:

$$m_1 = f'(k - \sqrt{k}) = (k - \sqrt{k})^{k-1} e^{k-(k-\sqrt{k})}[k - (k - \sqrt{k})] = \sqrt{k}(k - \sqrt{k})^{k-1} e^{\sqrt{k}}$$

ed equazione:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \;\rightarrow\; y - (k - \sqrt{k})^k e^{\sqrt{k}} = \sqrt{k}(k - \sqrt{k})^{k-1} e^{\sqrt{k}}(x - k + \sqrt{k}).$$

Il secondo flesso F_2, di ascissa $x_2 = k + \sqrt{k}$, ha ordinata:

$$y_2 = f(k + \sqrt{k}) = (k + \sqrt{k})^k e^{k-(k+\sqrt{k})} = (k + \sqrt{k})^k e^{-\sqrt{k}}.$$

La retta tangente al grafico in F_2 ha coefficiente angolare:

$$m_2 = f'(k + \sqrt{k}) = (k + \sqrt{k})^{k-1} e^{k-(k+\sqrt{k})}[k - (k + \sqrt{k})] = -\sqrt{k}(k + \sqrt{k})^{k-1} e^{-\sqrt{k}}$$

ed equazione:

$$y - y_2 = m_2(x - x_2) \;\rightarrow\; y - (k + \sqrt{k})^k e^{-\sqrt{k}} = -\sqrt{k}(k + \sqrt{k})^{k-1} e^{-\sqrt{k}}(x - k - \sqrt{k}).$$

In particolare, le coordinate dei punti di flesso e le equazioni delle rette tangenti al grafico nei suoi punti di flesso nel caso $k = 2$ sono:

$$F_1(2 - \sqrt{2}; (6 - 4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}) \simeq (0{,}59; 1{,}41);$$

$$m_1 = f'(2 - \sqrt{2}) = (2 - \sqrt{2})e^{2-(2-\sqrt{2})}[2 - (2 - \sqrt{2})] = (2\sqrt{2} - 2)e^{\sqrt{2}} \simeq 3{,}41;$$

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \;\rightarrow\; y - (6 - 4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} = (2\sqrt{2} - 2)e^{\sqrt{2}}(x - 2 + \sqrt{2});$$

$$F_2(2 + \sqrt{2}; (6 + 4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}) \simeq (3{,}41; 2{,}83);$$

$$m_2 = f'(2 + \sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})e^{2-(2+\sqrt{2})}[2 - (2 + \sqrt{2})] = (-2\sqrt{2} - 2)e^{-\sqrt{2}} \simeq -1{,}17;$$

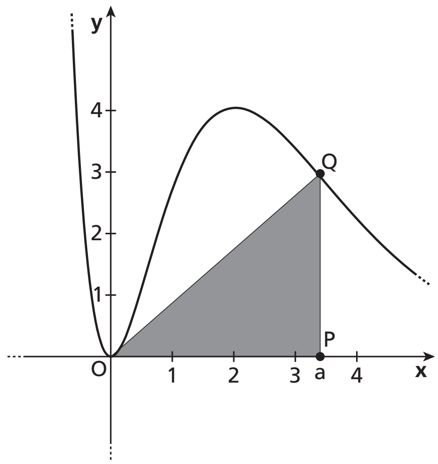
$$y - y_2 = m_2(x - x_2) \;\rightarrow\; y - (6 + 4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} = (-2\sqrt{2} - 2)e^{-\sqrt{2}}(x - 2 - \sqrt{2}).$$

2. Fissato $a \geq 0$, consideriamo il triangolo rettangolo OPQ di vertici:

$$O(0; 0),\ P(a; 0),\ Q(a; f(a)),$$

la cui area, dipendente da a, è:

$$h(a) = \frac{1}{2}\overline{OP}\cdot\overline{PQ} = \frac{1}{2}a\cdot f(a) = \frac{1}{2}a\cdot a^2e^{2-a} = \frac{1}{2}a^3e^{2-a}.$$



■ **Figura 6**

Determiniamo a in modo che l'area sia massima.
Sicuramente è $a > 0$, perché per $a = 0$ il triangolo degenera nell'origine e ha area nulla.
Per $a > 0$, cerchiamo il massimo relativo di $h(a)$. La derivata prima:

$$h'(a) = \mathrm{D}\left[\frac{1}{2}a^3e^{2-a}\right] = \frac{1}{2}3a^2e^{2-a} - \frac{1}{2}a^3e^{2-a} = \frac{1}{2}a^2e^{2-a}(3-a)$$

si annulla per $a = 3$, è positiva per $0 < a < 3$ e negativa per $a > 3$. La funzione $h(a)$ ha quindi massimo per $a = 3$: l'area del triangolo OPQ è massima quando $a = 3$ e vale $\frac{27}{2}e^{-1}$.

3. L'area della regione di piano delimitata da $f(x)$ e dall'asse x in $[0; 2]$ è data da:

$$A = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2e^{2-x}dx.$$

Deriviamo per parti l'integrale indefinito (trascuriamo la costante additiva finale perché non servirà nel calcolo dell'integrale definito):

$$\int x^2e^{2-x}dx = -\int x^2(-e^{2-x})dx = -\left[x^2e^{2-x} - \int 2xe^{2-x}dx\right] =$$

$$-x^2e^{2-x} - 2\int x(-e^{2-x})dx = -x^2e^{2-x} - 2\left[xe^{2-x} - \int e^{2-x}dx\right] =$$

$$-x^2e^{2-x} - 2xe^{2-x} - 2\int(-e^{2-x})dx = -x^2e^{2-x} - 2xe^{2-x} - 2e^{2-x} =$$

$$-e^{2-x}(x^2+2x+2).$$

Proseguiamo con il calcolo dell'area:

$$A = \int_0^2 x^2e^{2-x}dx = [-e^{2-x}(x^2+2x+2)]_0^2 =$$

$$[-e^{2-2}(2^2+2\cdot 2+2)] - [-e^{2-0}(0^2+2\cdot 0+2)] = -10 + 2e^2 \simeq 4{,}778.$$

Determiniamo il valore dei coefficienti del polinomio di terzo grado:

$$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

che approssima la funzione $f(x)$ in $[0; 2]$. Imponiamo le condizioni indicate dal testo del problema, osservando che la derivata prima è $r'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$:

$$\begin{cases} r(0)=0 \\ r(2)=4 \\ r'(0)=0 \\ r'(2)=0 \end{cases} \to \begin{cases} d=0 \\ 8a+4b+2c+d=4 \\ c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \to \begin{cases} d=0 \\ 2a+b=1 \\ c=0 \\ 3a+b=0 \end{cases} \to \begin{cases} d=0 \\ b=1-2a \\ c=0 \\ 3a+1-2a=0 \end{cases} \to \begin{cases} d=0 \\ b=3 \\ c=0 \\ a=-1 \end{cases}$$

Il polinomio che approssima $f(x)$ è:

$$r(x) = -x^3 + 3x^2.$$

L'area sottesa al grafico di $r(x)$ nell'intervallo [0; 2] è:

$$A' = \int_0^2 r(x)dx = \int_0^2 (-x^3+3x^2)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{1}{4}\cdot 2^4 + 2^3 = 4.$$

L'errore percentuale commesso nel considerare l'area approssimata A' anziché l'area A è dato da:

$$\varepsilon = \frac{|A'-A|}{A}\cdot 100 = \frac{|4-4{,}778|}{4{,}778}\cdot 100 = \frac{0{,}778}{4{,}778}\cdot 100 \simeq 16{,}3\%.$$

4. Al punto **1.** avevamo determinato le equazioni delle rette tangenti al grafico di $f(x)$ nei punti di flesso al variare di k.

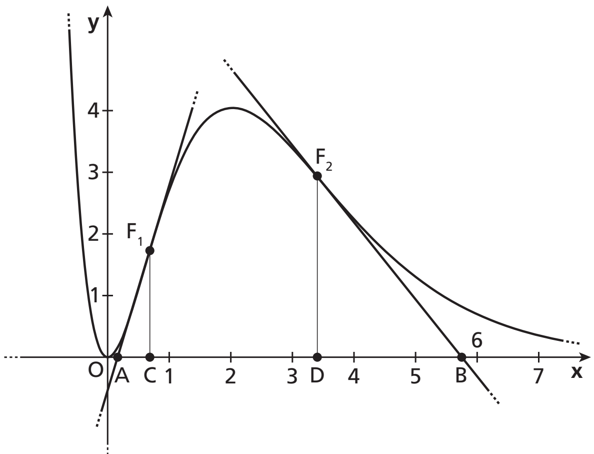


Figura 7

Determiniamo le coordinate dei punti A, B, C, D.
Dalla prima retta tangente $y - y_1 = m_1(x - x_1)$, ponendo $y = 0$, troviamo l'ascissa di A:

$$0 - (k-\sqrt{k})^k e^{\sqrt{k}} = \sqrt{k}(k-\sqrt{k})^{k-1} e^{\sqrt{k}}(x-k+\sqrt{k}) \to$$

$$x - k + \sqrt{k} = \frac{-(k-\sqrt{k})^k e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}(k-\sqrt{k})^{k-1} e^{\sqrt{k}}} \to x = \frac{-k+\sqrt{k}}{\sqrt{k}} + k - \sqrt{k} \to A(1+k-2\sqrt{k}; 0).$$

Dalla seconda retta tangente $y - y_2 = m_2(x - x_2)$, ponendo $y = 0$, troviamo l'ascissa di B:

$$0 - (4+\sqrt{k})^k e^{-\sqrt{k}} = -\sqrt{k}(k+\sqrt{k})^{k-1} e^{-\sqrt{k}}(x-k-\sqrt{k}) \to$$

$$x - k - \sqrt{k} = \frac{-(k+\sqrt{k})^k e^{-\sqrt{k}}}{-\sqrt{k}(k+\sqrt{k})^{k-1} e^{-\sqrt{k}}} \to x = \frac{k+\sqrt{k}}{\sqrt{k}} + k + \sqrt{k} \to B(1+k+2\sqrt{k}; 0).$$

Le proiezioni C e D hanno coordinate: $C(x_1; 0) = (k - \sqrt{k}; 0)$, $D(x_2; 0) = (k + \sqrt{k}; 0)$.
Il segmento AB è lungo:

$$\overline{AB} = x_B - x_A = 1 + k + 2\sqrt{k} - 1 - k - 2\sqrt{k} = 4\sqrt{k}.$$

Il segmento CD è lungo:

$$\overline{CD} = x_D - x_C = (k + \sqrt{k}) - (k - \sqrt{k}) = 2\sqrt{k}.$$

I segmenti AB e CD sono quindi legati dalla relazione: $\overline{AB} = 2\overline{CD}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.