2 Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 2x + 1 & \text{per } x < 2 \\ x^2 + (k-1)x - 1 & \text{per } x \geq 2 \end{cases},$$

determinare, se possibile, k in modo che la funzione $f(x)$ e la sua derivata siano continue in tutto l'insieme di definizione.

2 La funzione:

$$f(x)=\begin{cases} kx^2-2x+1 & \text{se } x<2 \\ x^2+(k-1)x-1 & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$, perché definita nei due intervalli aperti da funzioni polinomiali.
Imponiamo la continuità in $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2) \;\to\; 4k-4+1=4+2(k-1)-1 \;\to\; 2k=4 \;\to\; k=2.$$

La funzione, continua in $\mathbb{R}$, diventa:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-2x+1 & \text{se } x<2 \\ x^2+x-1 & \text{se } x\geq 2 \end{cases}.$$

Per la derivabilità, possiamo subito dire che $f(x)$ è derivabile con derivata continua in $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$, e risulta:

$$f'(x)=\begin{cases} 4x-2 & \text{se } x<2 \\ 2x+1 & \text{se } x>2 \end{cases}.$$

Nel punto $x=2$ si ha:

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^-}(4x-2)=6; \quad \lim_{x\to 2+} f'(x)=\lim_{x\to 2^+}(2x+1)=5.$$

I limiti sono diversi, quindi la funzione $f(x)$ non è derivabile, con derivata continua, in $\mathbb{R}$.
Conclusione: non esiste un valore di k per il quale $f(x)$ soddisfa la proprietà richiesta, ossia essere derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata continua.