Liceo scientifico e opzione scienze applicate

1 Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln(x)$, adoperando la definizione di derivata.

1 Calcoliamo la derivata di $f(x) = \ln x$, applicando la definizione di derivata, in un generico punto $x > 0$:

$$\mathrm{D}[\ln x] = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h \to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$\ln\left[\lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{h} \cdot x \cdot \frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}.$$

Per $h \to 0$ è $\frac{x}{h} \to \infty$, quindi possiamo applicare il limite notevole $\lim_{y \to \infty}\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} = e$ per dedurre $\lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} = e$.

Otteniamo allora:

$$D[\ln x] = \ln\left[\lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$