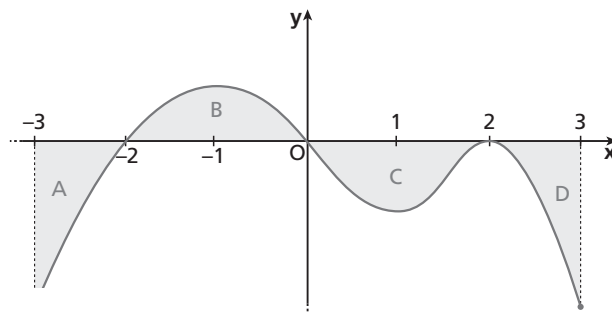


**PROBLEMA 1**

La funzione derivabile  $y = f(x)$  ha, per  $x \in [-3; 3]$ , il grafico  $\Gamma$ , disegnato in figura.  $\Gamma$  presenta tangenti orizzontali per  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ . Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia  $g(x)$  una primitiva di  $f(x)$  tale che  $g(3) = -5$ .



■ Figura 1

1. Nel caso  $f(x)$  fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di  $x \in [-3; 3]$  per cui  $g(x)$  ha un massimo relativo e determina i valori di  $x$  per i quali  $g(x)$  volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola  $g(0)$  e, se esiste, il  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + g(x)}{2x}$ .
4. Sia  $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$ , determina il valore di  $\int_{-2}^1 h(x) dx$ .

## PROBLEMA 1

- a. Indichiamo con  $x$  i minuti di conversazione effettuati nel mese considerato:  $x$  rappresenta una variabile discreta, ma ai fini della risoluzione ipotizziamo che vari con continuità in  $\mathbb{R}$  e che le funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  siano continue rispetto a  $x$ . La spesa totale mensile in euro è espressa quindi dalla funzione:

$$f(x) = 10 + \frac{x}{10}.$$

La variabile  $x$  può assumere valori tra un minimo di 0 minuti e un massimo di 43 200 minuti, pari al numero di minuti di un mese commerciale di 30 giorni.

Il grafico della funzione  $f(x)$  rappresenta un modello lineare crescente, dove l'intercetta 10 indica il costo fisso iniziale e la pendenza  $\frac{1}{10}$  indica il costo al minuto. Quindi la spesa minima mensile è € 10, che corrisponde a 0 minuti di conversazione, mentre la spesa massima mensile è € 4330, corrispondente a una conversazione lunga tutto il mese.

Il costo medio al minuto è espresso dal rapporto:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ ovvero } g(x) = \frac{x + 100}{10x}.$$

Il dominio della funzione  $g(x)$  è uguale a quello della funzione  $f(x)$  privato dello 0. Il grafico della funzione omografica  $g(x)$ , nel suo dominio naturale, è un'iperbole con l'asse  $y$  come asintoto verticale e la retta  $y = \frac{1}{10}$  come asintoto orizzontale. Rappresentiamo i grafici nel primo quadrante.

Per  $x > 0$ , la funzione  $g(x)$  tende decrescendo al valore  $\frac{1}{10}$  senza assumere mai tale valore. Quindi nel dominio  $]0; +\infty[$  la funzione  $g(x)$  non ha estremanti relativi.

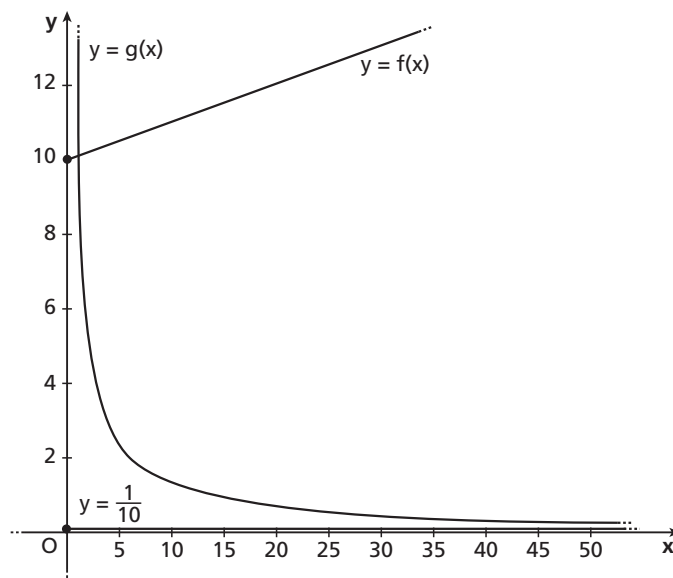
Se tuttavia consideriamo il dominio  $]0; 43\,200]$  imposto dalla situazione concreta, la funzione  $g(x)$  ammette minimo assoluto (e quindi anche relativo) nell'estremo destro del suo dominio.

Il minimo assoluto vale

$$g(43\,200) = \frac{43\,300}{432\,000} \simeq 0,1,$$

cioè un valore prossimo a quello dell'asintoto. Dal punto di vista dell'analisi dei consumi, l'errore che si commette a lavorare nel dominio  $]0; +\infty[$  anziché nel dominio  $]0; 43\,200]$  è trascurabile, quindi nel seguito considereremo semplicemente  $x > 0$ .

La funzione  $g(x)$  è decrescente e quindi il costo medio al minuto diminuisce all'aumentare dei minuti di conversazione effettuati; esso tuttavia non potrà mai essere inferiore a 10 centesimi al minuto.



■ Figura 3

- b. Se  $x_0$  rappresenta il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, e quindi  $g(x_0)$  il relativo costo medio per minuto, allora il valore  $x_1$  richiesto indica il numero di minuti di conversazione che dimezzano il costo medio  $g(x_0)$ . Di conseguenza dovrà necessariamente essere  $x_1 > x_0$ .

Determiniamo  $x_1$  in funzione di  $x_0$ .

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} \rightarrow \frac{x_1 + 100}{10x_1} = \frac{x_0 + 100}{20x_0} \rightarrow 2x_0(x_1 + 100) = x_1(x_0 + 100) \rightarrow x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0}.$$

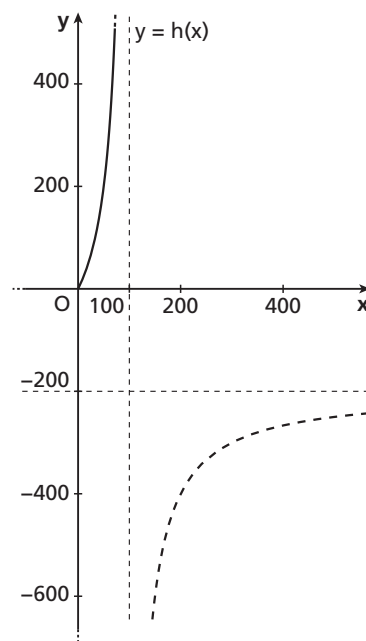
Scriviamo la funzione che esprime la dipendenza di  $x_1$  da  $x_0$  come:

$$h(x) = \frac{200x}{100 - x}.$$

Nel dominio naturale il grafico di tale funzione omografica è un'iperbole di asintoti  $x = 100$  e  $y = -200$ . Riferita al contesto reale, rappresentiamo il grafico solo per  $x > 0$ .

Poiché sia le ascisse sia le ordinate rappresentano minuti di conversazione, solamente il ramo positivo dell'iperbole ha un significato reale.

Il valore 100, che individua l'asintoto verticale, è esattamente il numero di minuti di conversazione che hanno come costo medio  $g(100) = \frac{1}{5} = 0,2$ , esattamente il doppio di  $\frac{1}{10}$ , costo medio asintotico. Raggiunti o superati i 100 minuti di conversazione, il costo medio non è quindi più dimezzabile. Dunque il dominio che modella la situazione reale è  $]0; 100[$ . Più ci avviciniamo ai 100 minuti di conversazione, più il tempo  $x_1$  necessario a dimezzare il costo al minuto tende a diventare infinitamente elevato, da cui l'andamento asintotico della funzione considerata.



■ Figura 4

- c. Cerchiamo una funzione del tipo

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

il cui grafico passa per i punti  $A(0; 2)$ ,  $B(2; \frac{7}{2})$  e  $C(4; 4)$ .

Risolviamo il sistema ottenuto sostituendo all'equazione della funzione le coordinate dei punti noti:

$$\begin{cases} 2 = c \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + c \\ 4 = 16a + 4b + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b = \frac{3}{2} \\ 8a + 2b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

La funzione che descrive il margine superiore della zona considerata è dunque

$$p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2, \text{ con } x \in [0; 6].$$

La funzione descrive un arco di parabola il cui vertice è proprio il punto C, come suggerisce la figura.

L'area della zona considerata, ovvero l'area sottesa dalla funzione  $p(x)$  nell'intervallo  $[0; 6]$ , vale:

$$A_{\text{totale}} = \int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right) dx = \left[-\frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^6 = 21 \text{ km}^2.$$

La regione Z priva di copertura ha area  $0,5 \text{ km}^2$ , pertanto la regione effettivamente coperta dal segnale ha area  $A_{\text{coperta}} = 20,5 \text{ km}^2$ . Osserviamo che:

$$\frac{A_{\text{coperta}}}{A_{\text{totale}}} = \frac{20,5}{21} \simeq 0,976 = 97,6\%.$$

Tale rapporto è quindi superiore alla copertura dichiarata dal gestore (96%). L'affermazione sul sito web sottostima l'effettiva copertura, ma la differenza è a vantaggio del consumatore.

- d. Dopo la modifica del piano tariffario, le funzioni diventano definite per casi, in particolare l'espressione della spesa totale dopo  $x$  minuti di conversazione diventa una funzione lineare crescente a tratti di equazione:

$$f_2(x) = \begin{cases} 10 + \frac{x}{10} & \text{se } 0 \leq x \leq 500 \\ 10 + \frac{x}{10} + \frac{x-500}{5} = \frac{x-200}{5} & \text{se } x > 500 \end{cases}$$

La nuova funzione è continua in tutto il suo dominio, anche in 500, dove limite destro e limite sinistro coincidono col valore  $f_2(500) = 60$ . La funzione non è invece derivabile in tale punto in quanto la derivata sinistra è  $\frac{1}{10}$ , mentre la derivata destra vale  $\frac{1}{5}$ . La funzione  $f_2(x)$  è quindi derivabile in ogni punto del dominio tranne in  $x = 500$ , dove è presente un punto angoloso.

Il costo medio al minuto aggiornato alla nuova tariffa diventa:

$$g_2(x) = \frac{f_2(x)}{x} = \begin{cases} \frac{x+100}{10x} & \text{se } 0 < x \leq 500 \\ \frac{x-200}{5x} & \text{se } x > 500 \end{cases}$$

Questa funzione è continua in ogni punto del dominio, anche in 500, e vale  $g_2(500) = \frac{3}{25} = 0,12$ .

Il grafico di tale funzione è rappresentato da due rami di iperbole.

Rispetto alla situazione precedente,  $g_2(x)$  presenta ora un nuovo asintoto orizzontale destro di equazione  $y = \frac{1}{5}$ , è decrescente tra 0 e 500 e crescente per  $x > 500$ , con un minimo assoluto in 500. La funzione non ha invece massimo assoluto né relativo.

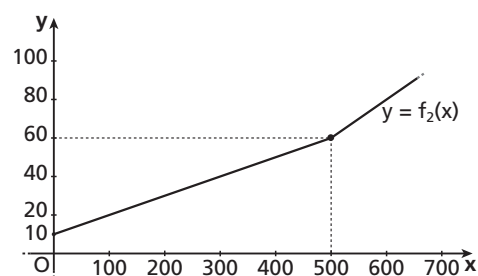
In 500, la funzione  $g_2(x)$  ha un punto angoloso e la sua derivata non è definita in tale punto. Dunque, in 500, la funzione  $g_2'(x)$  ha una singolarità con salto.

Tra 0 e 500, la concavità di  $g_2(x)$  è rivolta verso l'alto, quindi  $g_2''(x)$  è positiva e di conseguenza  $g_2'(x)$  è crescente. Per ragionamenti analoghi,  $g_2'(x)$  è decrescente per  $x > 500$ .

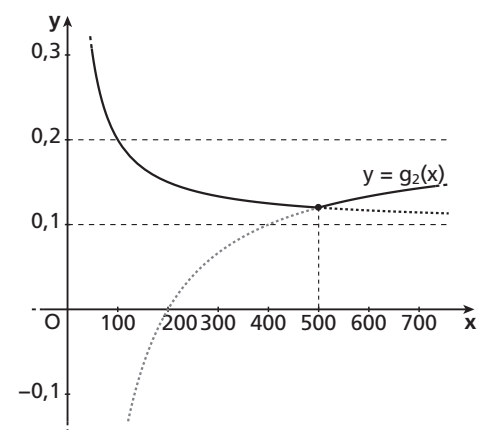
Potevamo pervenire alle stesse conclusioni studiando la funzione:

$$g_2'(x) = \begin{cases} -\frac{10}{x^2} & \text{se } 0 < x < 500 \\ \frac{40}{x^2} & \text{se } x > 500 \end{cases}$$

Nella situazione concreta, la funzione  $f_2(x)$  che descrive la spesa totale continua a crescere, ma raddoppia la pendenza dopo i primi 500 minuti, perché da quel momento in poi raddoppia il costo al minuto. Per quanto riguarda la funzione  $g_2(x)$  che descrive la spesa media al minuto, notiamo che, come per il piano tariffario precedente, decresce per i primi 500 minuti, ma poi inverte la tendenza e cresce per avvicinarsi al nuovo costo unitario di 20 centesimi al minuto.



■ Figura 5



■ Figura 6