Liceo scientifico e opzione scienze applicate

PROBLEMA 1

Sei addetto alla gestione di una macchina utensile in cui è presente un contenitore di olio lubrificante avente la forma di un cono circolare retto col vertice rivolto verso il basso. Il raggio di base r del cono è 4 cm mentre l'altezza h è 12 cm. In tale contenitore, inizialmente vuoto, viene versato automaticamente dell'olio lubrificante alla velocità di 12π cm^3/s. Devi assicurarti che il processo avvenga correttamente, senza produrre traboccamenti di olio.

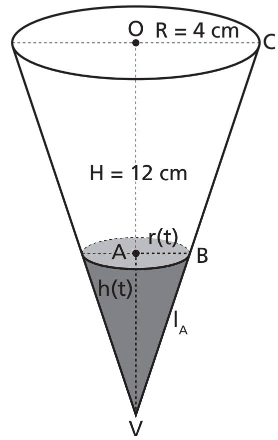
1. Determina l'espressione della funzione $h(t)$, che rappresenta il livello h (in cm) raggiunto dall'olio all'istante t (in secondi) e la velocità con la quale cresce il livello dell'olio durante il riempimento del contenitore.
2. Al fine di programmare il processo di versamento da parte della macchina utensile, determina il tempo t_R necessario perché il contenitore sia riempito fino al 75% della sua altezza.
3. Devi realizzare un indicatore graduato, da porre lungo l'apotema del cono, che indichi il volume V di olio presente nel recipiente in corrispondenza del livello raggiunto dall'olio l_A, misurato all'apotema. Individua l'espressione della funzione $V(l_A)$ da utilizzare per realizzare tale indicatore graduato.
4. A causa di un cambiamento nell'utilizzo della macchina, ti viene richiesto di progettare un nuovo e più capiente recipiente conico, avente apotema a uguale a quello del contenitore attualmente in uso. Determina i valori di h e di r in corrispondenza dei quali il volume del cono è massimo e verifica, a parità di flusso di olio in ingresso e di tempo di riempimento t_R, a quale livello di riempimento si arriva. È ancora pari al 75% dell'altezza?

PROBLEMA 1

1. Per evitare ambiguità, diversamente dal testo del problema, indichiamo con le lettere maiuscole H e R rispettivamente l'altezza di 12 cm e il raggio di 4 cm del serbatoio a forma di cono, e con le lettere minuscole $h(t)$ e $r(t)$ rispettivamente l'altezza e il raggio del cono individuato dalla parte di serbatoio riempito all'istante t.

Per la similitudine dei triangoli VAB e VOC, è:

$$\overline{VA} : \overline{AB} = \overline{VO} : \overline{OC} \rightarrow h(t) : r(t) = 12 : 4 \rightarrow h(t) = 3r(t).$$



■ **Figura 2**

L'olio è versato alla velocità $q = 12\pi$ cm^3/s, quindi in t secondi vengono versati $Q = 12\pi t$ cm^3 di olio. Imponiamo che il volume del cono di altezza $h(t)$ e raggio $r(t)$ sia uguale a Q:

$$\frac{1}{3}h(t) \cdot \pi[r(t)]^2 = Q \rightarrow \frac{1}{3} \cdot 3r(t) \cdot \pi[r(t)]^2 = 12\pi t \rightarrow$$

$$[r(t)]^3 = 12t \rightarrow r(t) = \sqrt[3]{12t}.$$

Sempre per l'equivalenza $h(t) = 3r(t)$, risulta:

$$h(t) = 3\sqrt[3]{12t}, \text{ con } t \geq 0.$$

La velocità di crescita del livello dell'olio è espressa dalla derivata prima della funzione $h(t)$:

$$h'(t) = \mathrm{D}\left[3(12t)^{\frac{1}{3}}\right] = 3 \cdot \frac{1}{3}(12t)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 12 = 12(12t)^{-\frac{2}{3}} = \frac{12}{\sqrt[3]{(12t)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{12t}}{\sqrt[3]{12t}} = \frac{\sqrt[3]{12t}}{t}.$$

2. Il 75% dell'altezza del serbatoio corrisponde a:

$$\frac{75}{100}H = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9 \text{ cm}.$$

L'olio raggiunge tale livello dopo un tempo t_R dato da:

$$3\sqrt[3]{12t_R} = 9 \rightarrow \sqrt[3]{12t_R} = 3 \rightarrow 12t_R = 3^3 \rightarrow t_R = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = 2{,}25 \text{ s}.$$

3. Indicato con $l_A = \overline{VB}$ il livello raggiunto dall'olio lungo l'apotema del cono, ricaviamo i corrispondenti valori di $h(t)$ e $r(t)$:

$$[h(t)]^2 + [r(t)]^2 = l_A^2 \rightarrow [3r(t)]^2 + [r(t)]^2 = l_A^2 \rightarrow 10[r(t)]^2 = l_A^2 \rightarrow$$

$$r(t) = \frac{l_A}{\sqrt{10}}, h(t) = \frac{3l_A}{\sqrt{10}}.$$

Il volume della parte di serbatoio occupato dall'olio, in funzione del livello l_A raggiunto, è:

$$V(l_A) = \frac{1}{3} \cdot h(t) \cdot \pi[r(t)]^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3l_A}{\sqrt{10}} \cdot \pi \cdot \left[\frac{l_A}{\sqrt{10}}\right]^2 = \frac{l_A}{\sqrt{10}} \cdot \pi \frac{l_A^2}{10} = \frac{\pi l_A^3}{10\sqrt{10}}.$$

4. L'apotema del serbatoio iniziale è lungo:

$$a^2 = H^2 + R^2 = 12^2 + 4^4 = 160 \;\rightarrow\; a = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}\ \text{cm}.$$

Nel nuovo serbatoio, sempre a forma di cono e con apotema a, l'altezza h e il raggio r devono essere tali che:

$$a^2 = h^2 + r^2 \;\rightarrow\; r^2 = a^2 - h^2 = 160 - h^2.$$

Il volume di tale serbatoio, in funzione dell'altezza h, è dato da:

$$V = \frac{1}{3}\cdot h \cdot \pi r^2 = \frac{\pi}{3}h(160 - h^2).$$

Determiniamo il valore di h che massimizza il volume.

$$V' = \frac{\pi}{3}\cdot\left[(160 - h^2) + h(-2h)\right] = \frac{\pi}{3}\cdot(160 - 3h^2),$$

$$V' = 0 \;\rightarrow\; 160 - 3h^2 = 0 \;\rightarrow\; h = \pm\sqrt{\frac{160}{3}} = \pm 4\sqrt{\frac{10}{3}}.$$

Poiché il grafico di V' è una parabola che volge la concavità verso il basso, V' è positivo per valori di h interni alle radici trovate e negativo per valori di h esterni. Considerata la limitazione $h > 0$ dovuta al contesto reale, otteniamo il seguente schema.

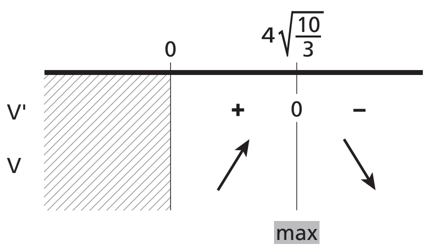


Figura 3

Il volume del nuovo cono è dunque massimo in corrispondenza di:

$$h = 4\sqrt{\frac{10}{3}} \simeq 7{,}30\ \text{cm}, \quad r = \sqrt{160 - h^2} = \sqrt{160 - \frac{160}{3}} = \sqrt{\frac{320}{3}} = 8\sqrt{\frac{5}{3}} \simeq 10{,}33\ \text{m}.$$

Rappresentiamo a lato il nuovo serbatoio. In questo caso, altezza e raggio sono legati dalla seguente relazione:

$$h : r = \overline{WD} : \overline{DE} \;\rightarrow$$

$$\overline{DE} = \frac{r}{h}\overline{WD} = 8\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{10}}\,\overline{WD} = \sqrt{2}\cdot\overline{WD}.$$

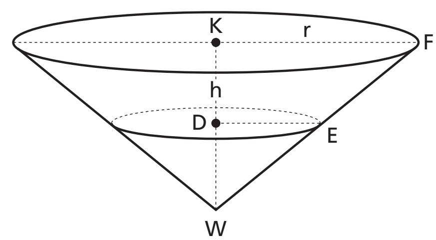


Figura 4

Nell'intervallo di tempo $t_R = 2{,}25$ s, con un flusso di riempimento pari a $q = 12\pi$ cm^3/s, il nuovo serbatoio si riempie di:

$$q \cdot t_R = 12\pi \cdot \frac{9}{4} = 27\pi\ \text{cm}^3$$

di olio. Imponiamo che il cono di altezza WD e raggio DE abbia volume 27π cm^3:

$$\frac{1}{3}\overline{WD}\cdot\pi\overline{DE}^2 = 27\pi \;\rightarrow\; \overline{WD}\cdot 2\overline{WD}^2 = 81 \;\rightarrow\; \overline{WD}^3 = \frac{81}{2} \;\rightarrow\; \overline{WD} = \sqrt[3]{\frac{81}{2}} = 3\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \simeq 3{,}43\ \text{cm}.$$

Quindi il nuovo serbatoio, in 2,25 s, si riempie fino a circa 3,43 cm di altezza.

Poiché:

$$h \cdot \frac{75}{100} = h \cdot \frac{3}{4} \simeq 7{,}30 \cdot \frac{3}{4} = 5{,}475 > 3{,}43,$$

il livello dell'olio in questo caso *non* raggiunge il 75% dell'altezza totale del serbatoio.