5 Stabilire per quale valore del parametro k il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 4$ ha una sola tangente parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Quante tangenti orizzontali ha il grafico della funzione per questo valore del parametro k?

5 Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 4.$$

Se in un punto del suo grafico la funzione è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante, vuol dire che in quel punto la retta tangente ha coefficiente angolare $+1$, ovvero che la funzione derivata prima assume valore $+1$.
Imponiamo allora che l'equazione $f'(x) = 1$ abbia una sola soluzione.

$$f'(x) = 1 \rightarrow 3x^2 + 4x + k = 1 \rightarrow 3x^2 + 4x + k - 1 = 0.$$

L'equazione ha una sola soluzione se il discriminante è nullo:

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow 2^2 - 3 \cdot (k-1) = 0 \rightarrow 4 - 3k + 3 = 0 \rightarrow 3k = 7 \rightarrow k = \frac{7}{3}.$$

La corrispondente funzione è:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + \frac{7}{3}x - 4, \text{ con } f'(x) = 3x^2 + 4x + \frac{7}{3}.$$

Il numero di tangenti orizzontali al grafico di $f(x)$ è dato dal numero di soluzioni reali dell'equazione:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 4x + \frac{7}{3} = 0 \rightarrow 9x^2 + 12x + 7 = 0.$$

Poiché il discriminante è negativo $\left(\frac{\Delta}{4} = 6^2 - 9 \cdot 7 < 0\right)$, l'equazione non ha soluzioni reali e il grafico di $f(x)$ non presenta tangenti orizzontali.