Liceo scientifico e opzione scienze applicate

8 Determina, utilizzando la definizione, la derivata prima della seguente funzione: $y = \sin 2x$ e generalizza il risultato per $y = \sin nx$ con $n \in \mathbb{N}$.

8 Data una funzione $f(x)$, per definizione la derivata prima della funzione nel punto x è il limite del rapporto incrementale:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Calcoliamo tale limite per la funzione $f(x) = \sin 2x$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin 2(x+h) - \sin 2x}{h}.$$

Applichiamo al numeratore la formula di prostaferesi: $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin h \cos(2x+h)}{h} = 2 \lim_{h \to 0} \cdot \frac{\sin h}{h} \cdot \cos(2x+h) = 2\cos 2x.$$

Osserviamo che nell'ultimo passaggio abbiamo usato il limite notevole $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

Pertanto la derivata di $y = \sin 2x$ è $y' = 2\cos 2x$.

Generalizziamo considerando $y = \sin nx$ con $n \in \mathbb{N}$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin n(x+h) - \sin nx}{h}.$$

Applichiamo la formula di prostaferesi applicata al numeratore:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin \frac{nh}{2} \cos\left(nx + \frac{nh}{2}\right)}{h} = n \lim_{h \to 0} \cdot \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}} \cdot \cos\left(nx + \frac{nh}{2}\right) = n \cos nx.$$

Osserviamo che nell'ultimo passaggio abbiamo usato il limite notevole $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}$, posto $t = \frac{nh}{2}$.
Allora la derivata di $y = \sin nx$ è $y' = n \cos nx$.