Liceo scientifico e opzione scienze applicate

9 Calcolare la derivata $f(x) = x \cdot e^x$, adoperando la definizione di derivata.

9 La derivata della funzione $f(x)$ in un punto x del suo dominio è per definizione il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, al tendere a zero dell'incremento h.

Consideriamo $f(x) = x \cdot e^x$ e calcoliamo il limite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)e^{x+h} - x \cdot e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x \cdot e^{x+h} + h \cdot e^{x+h} - x \cdot e^x}{h} =$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{x \cdot e^x (e^h - 1) + h \cdot e^{x+h}}{h} = \lim_{h \to 0}\left[x \cdot e^x \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) + e^{x+h}\right] = x \cdot e^x \left(\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}\right) + e^x =$$
$$x \cdot e^x \cdot 1 + e^x = (x+1) \cdot e^x.$$